田原の物理（基本編）PDF 版

第 1 講　運動の表し方

講師　田原真人

こんにちは、田原です。

物理 Web 講座では、無料で「物理のための数学サポート講座」を開講していますので、三角関数や、ベクトル、微積分をやったことがなかったり、忘れてしまっている人は、まず、「数学サポート講座」を受講してみてくださいね。ただ、この講座は PC レター版ですので、PC レターが見れない環境の人は、PDF 版の「補講・物理のための微積分超入門」を代わりに受講してください。
第 1 講では、早速、その微積分を使います。

それでは、始めます。

今日の内容は、『田原の必修物理』の p9〜11, p23〜24 の内容です。

■力学の問題は２パターンしかない！

第０講で話したように、力学の全ての問題は、運動方程式から法則を導いて解いていきます。

このことから、力学の問題は、結局のところ２パターンしかないことが分かるのです。

まず、運動方程式を書いてみますね。

運動方程式

$$Ma = F$$

この式の意味や、イメージは後で話すとして、とりあえず、右辺が力、左辺が運動の様子を表すということだけを覚えておいてください。

$$\underbrace{Ma}_{\text{運動の様子}} = \underbrace{F}_{\text{力}}$$

ところで、「問題」というのは、何かを秘密にして初めて問題になりえますよね。
例えば、「僕は３４歳です。さて、問題です。僕は何歳でしょうか？はい！答えて！」というクイズは、やっても意味がありません。

「僕はいのしし年です。幼稚園では沢田研二の『勝手にしやがれ』が流行り、みんなで帽子を投げていました。小学校時代には、ヨーヨーが流行り、「犬の散歩」という技を必死で練習しました。さあ、僕は何歳でしょうか？」と聞けば、いのしし年という情報から、10 歳、22 歳、34 歳、46 歳、58 歳、70 歳などの候補を考え、流行りものの情報から年代を特定し、34 歳！と答えるでしょう。

つまり、問題というのは、何かが「秘密」にされていて、かつ、それ以外の情報が与えられていて、「秘密」の部分を推論などによって求められることが必要なのです。

力学の問題では、運動方程式の左辺を秘密にする場合と、右辺を秘密にする場合の 2 種類があります。

左辺を秘密にする場合は、「あなたには、物体にどんな力がはたらいているかを教えますから、運動方程式を使って、物体の運動の様子を求めてください。」という問題になります。

$$\underbrace{(\text{秘密})}_{\text{運動の様子}} = \underbrace{F}_{\text{力}}$$

一方、右辺を秘密にする場合は、「あなたには、物体の運動の様子を教えますから、運動方程式を使って、物体にはたらく力を求めてください。」という問題になります。

$$\underbrace{Ma}_{\text{運動の様子}} = \underbrace{(\text{秘密})}_{\text{力}}$$

全ての問題を、運動方程式から解くのが力学だということをふまえると、問題のパターンも 2 種類に限定されてしまうのです。

■運動の表し方

これまで述べたように、力学の問題のうちの半分は、「運動の様子を表しなさい」というものです。

ですから、運動を表す方法を学ぶことは、重要なことなんです。

ところで、表すというのは、「誰かに伝わるように表現する」ということですよね。

ですから、ある運動を見たときに、「その運動を誰かに伝えるには、何を言えばよいか」ということが分かれば、運動を表し方が分かります。

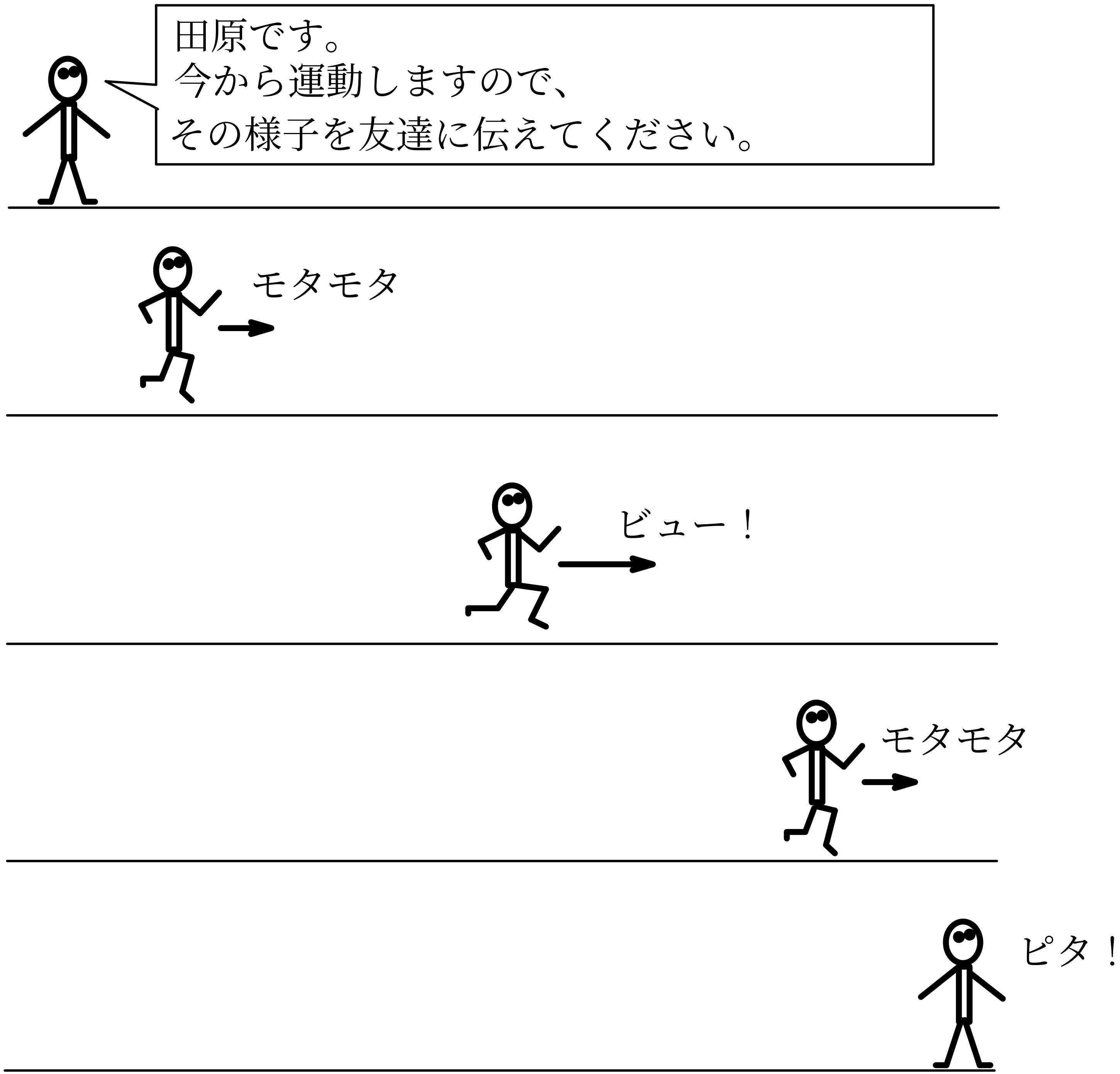
ある運動といってもイメージが沸かないと思いますので、僕がこの後、「運動」をしますね。

皆さんは、その運動の様子を、電話で誰か親しい人に伝えて下さい。

もし、電話を聞いた友達が、皆さんが見た僕の運動をちゃんと思い浮かべることができたら、

電話で話した内容に、運動がうまく表されていることになりますよね。

それでは、僕が運動をしますので、次のページを見て下さい。


田原です。
今から運動しますので、
その様子を友達に伝えてください。
モタモタ
ビュー！
モタモタ
ピタ！

はい！運動を見ましたね。

では、それをどういうふうに話したら、相手に伝わるでしょうか？

僕なら、例えば、このように話します。

「もしもし、田原だけど。今Ｗｅｂ講座受けてるんだ。講師の田原っていう人が、画面の左端から右向きにゆっくりと走り始めて、画面中央まで加速し、その後減速して右端で止まったんだ。いったい何が起こったかと思ったよ。」

ここに書いてある言葉に、運動を表すために必要な情報が含まれています。

相手に運動の様子を思い浮かべてもらうためには、まず、物体の位置を言わなくてはなりません。まず、動き始める前の図を書いてもらうのです。

「画面の左端から」というのがその部分ですね。

位置を表したら、次は動きの特徴です。

「右向きにゆっくりと」という部分は速度を表しています。

でも、速度だけでは動きの特徴を表せません。速度は変化するからです。その変化の様子を表すのが加速度です。

「画面中央まで加速し」「その後減速して」などがその部分ですね。

このように、運動特徴を表すのに、位置、速度、加速度を用いればよいことが分かりましたね。

運動を表す３つの変数

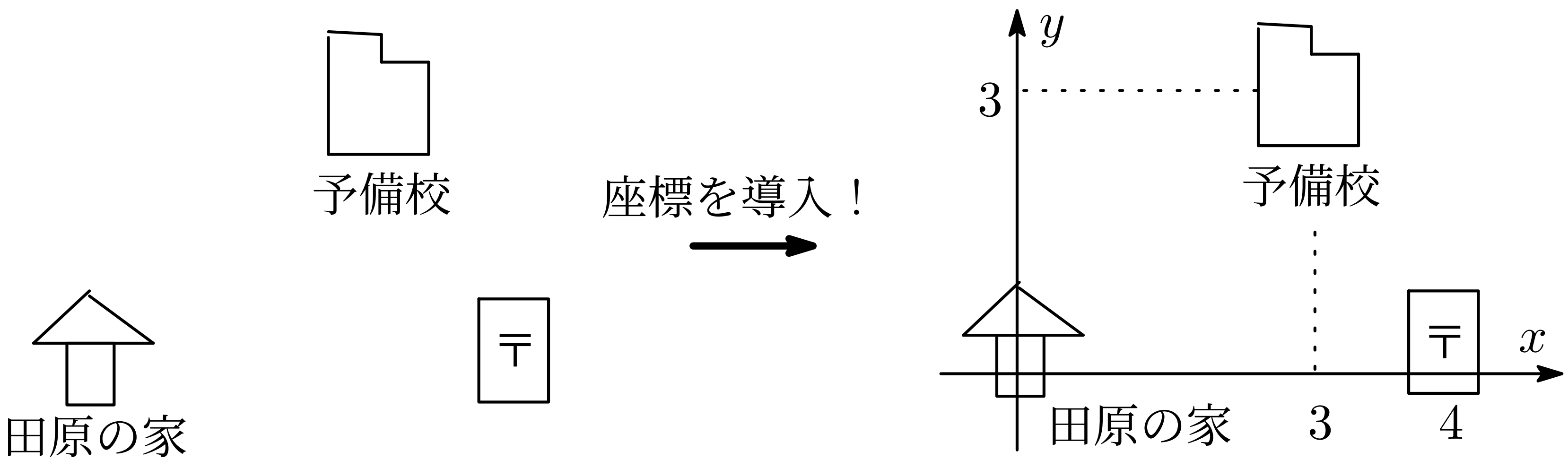
運動の様子は、位置・速度・加速度を用いて表す。

■位置

先ほどは、日本語によって運動の様子を表しましたが、物理は数学という言葉で自然現象を記述していくことになっています

ですから、位置も、数式に代入できる形で表さなくてはなりません。
そこで、座標を導入します。

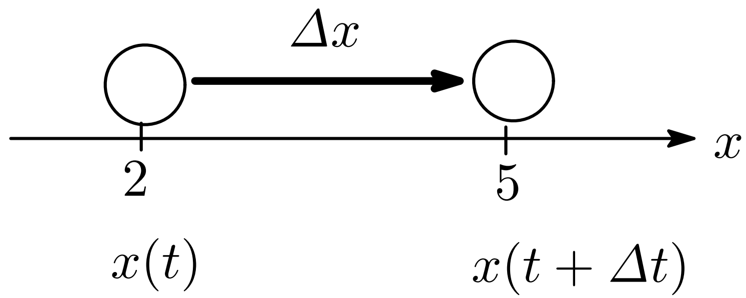
どこが原点でもよいですから、「こんな座標を取りました」と宣言してあげます。その瞬間、その座標によって、世界の全ての位置は数値化されます。



予備校の位置は (3,3)、郵便局は (4,0) のように数値で表すことができます。ですから、物体の位置を表すときには、必ず、それに先立って座標を設定し、「その座標では、このような数値になります」という言い方で表します。

次に、**変位**について説明します。

下の図のような一直線上の運動を考えます。



時刻 t に $x = 2$ にいた物体が、時刻 $t + \Delta t$ には、$x = 5$ へ移動したとします。これを、$x(t) = 2,\ x(t + \Delta t) = 5$ と表すことにします。このとき、位置の変化分

$$\Delta x = \underbrace{x(t + \Delta t)}_{\text{後}} - \underbrace{x(t)}_{\text{前}} = 5 - 2 = 3$$

を変位と呼びます。正の向き（図の右向き）に移動している場合は、$\Delta x > 0$、負の向き（図

の左向き）に移動している場合は、$\Delta x < 0$ になります。

変位とは、結局、「こう動いた！」移動を表すという矢印（ベクトル）のことです。それは、移動後の位置から、移動前の位置を引くことで表すことができるのです。

※ Δ は、デルタと呼ぶギリシャ文字で、変化量を表すときによく使います。例えば、Δy は、y の変化量、「Δ 田原」は、田原の変化量？を表します。

■速度

時間 Δt だけ変化する間に、位置が Δx だけ変化したとき、速度 v を、

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

と定義します。中学数学で「速さは、道のり割る時間」と教わりますが、速度は、「変位割る時間」です。道のりと違い、変位は負の値をとり得るので、速度も負の値を取り得ます。

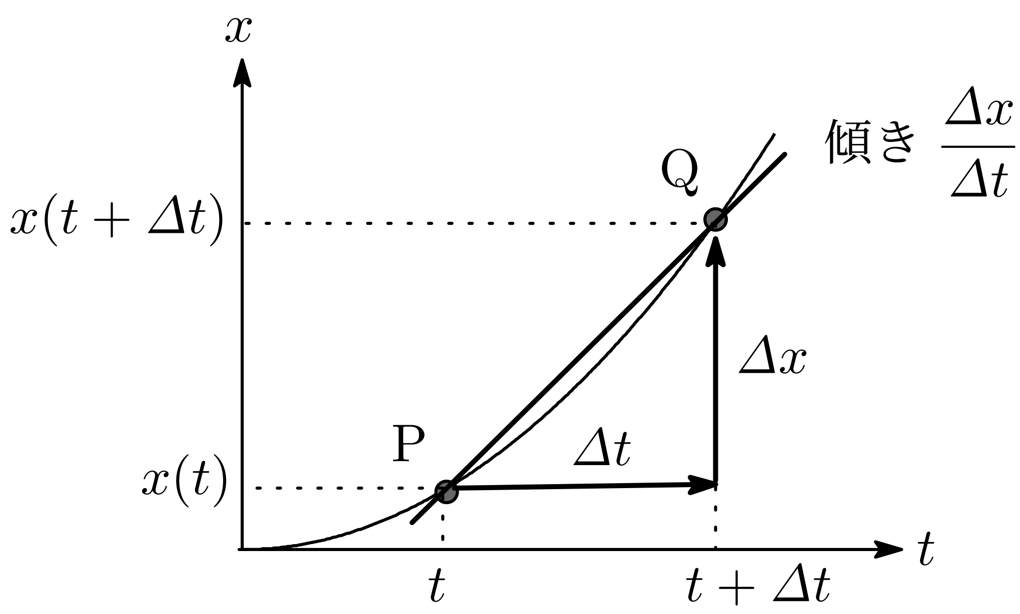
でも、僕は、この速度の定義が気に入りません。「それは、どこの速度？」と思うからです。

自動車にはスピードメーターがついていて、60km/h などと表示されますね。これは、1 時間で 60km 走ることのできる速さを表していますが、スピードメーターの値は刻一刻と変化していきますよね。

メーターが表示しているのは、「この瞬間の速度」なのです。僕が知りたいのは、時間 Δt の幅がある速度ではなく、ある点を「シュッ！」と通過する速度なんです。

自動車のスピードメーターが表すような、この瞬間の速度なのです。このような瞬間の速度をどのようにして求めたらよいでしょうか。

ここで、微積分の登場です。
もう一度、補講をみなおすときは、こちら。

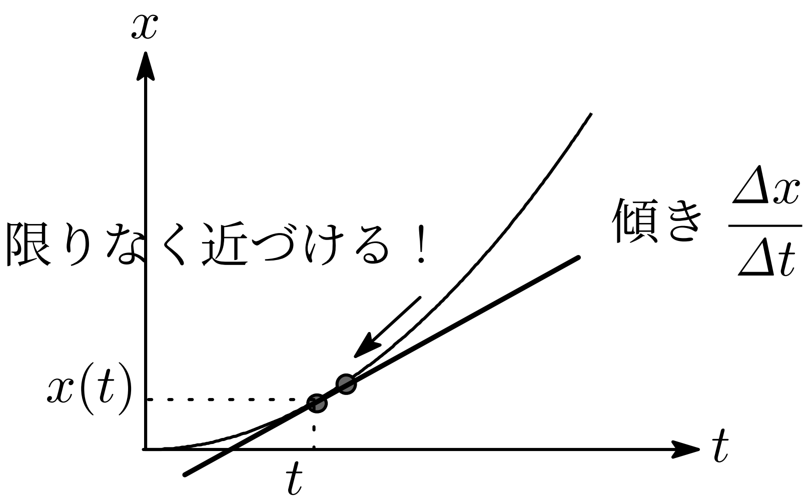


縦軸を x、横軸を t にとったグラフを書けば、速度 v は、2 点 P, Q を結ぶ直線の傾きになります。

僕の理想である「ある 1 点をシュッと通過する瞬間の速度」に近づけるために Δt をどんどん小さくしていきます。

どれだけ小さくするかというと、限りなく小さくします。

その結果、Q 点は P 点に限りなく近づき、PQ の傾きは、1 点 P における接線の傾きに限りなく近づきます。



h を 0 に近づけると、直線は接線に近づく

このようにして、接線の傾きを求めることを、「x を t で微分する」といい、

$$v = \frac{dx}{dt}$$

と表します。「時間で微分する」という省略記号として、ドットというものがあり、その記号を使うと、

$$v = \dot{x}$$

と表せます。読み方は、エックスドットです。

このようにして求まった接線の傾きは、まさに、1 点 P をシュッと通過する瞬間の速度になっています。

速度

速度は位置 x を時間 t で微分したもので、

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

と表し、$x - t$ グラフの接線の傾きになる。

■加速度

速度の変化率を加速度といいます。位置 x の変化率として速度 v を定義したのと同じようにして、加速度 a を定義すると、

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$

となります。$\ddot{x}$ は、位置 x を時刻 t で 2 回微分したという意味で、エックスツードットと呼びます。

速度が $\dot{x}$ でしたから、それをもう一回 t で微分した加速度は、$\ddot{x}$ と表せるのです。

加速度

加速度は速度 v を時間 t で微分したもので、

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$

と表し、$v - t$ グラフの接線の傾きになる。

■ 3 つの変数の関係

それでは、ここで、運動を表す 3 つの変数 x, v, a の関係を整理してみましょう。x を t で微分したものが速度 v、それをさらに微分したものが加速度 a でしたね。

さらに、微分によって求まる値は、「接線の傾き」を表す量でした。

それを図に表したのが下図です。

$$\begin{tikzcd}
\text{位置 } x \arrow[d, "t \text{ で微分 (接線の傾き)}"'] \\
\text{速度 } v = \dot{x} \arrow[d, "t \text{ で微分 (接線の傾き)}"'] \\
\text{加速度 } a = \ddot{x}
\end{tikzcd}$$

ところで、微分には、逆の計算がありましたね。そう！積分です。

そして、積分した値が表す量は、グラフと横軸とで囲まれた面積でした。

その関係も図に書き加えてみましょう。

$$
\begin{array}{rcl}
 & \text{位置 } x & \\
t\text{ で積分 (面積)} & \uparrow\ \downarrow & t\text{ で微分 (接線の傾き)} \\
 & \text{速度 } v = \dot{x} & \\
t\text{ で積分 (面積)} & \uparrow\ \downarrow & t\text{ で微分 (接線の傾き)} \\
 & \text{加速度 } a = \ddot{x} &
\end{array}
$$

これが、運動を表す３つの変数の関係です。

★ここまで理解したら、『必修物理』の例題 1（p11) にチャレンジ！
※微分積分がよく分からないという人は、補講、または、PC レター版の数学サポート講座を受けてくださいね。そこで、微分積分の初歩的な説明をしています。

では、ここで、質問します。

空欄にあてはまる言葉を、x, v, a の中から選び、なぜ、それを選んだのか理由を書いてください。(答は次のページにあります)

「運動を表すのに最も適したグラフは、（　　）$-t$ グラフである。」
理由：

運動は、位置、速度、加速度を使って表すので、その3つの変数を読み取ることができるグラフが、運動を表すのに適したグラフです。

$x-t$ グラフは、その傾きから速度を読み取ることができますが、加速度を読み取れません。

また、$a-t$ グラフは、その面積から速度変化 Δv を読み取ることができますが、位置の変化（変位）は、読み取れません。

それに対し、$v-t$ グラフは、その傾きから加速度 a を、その面積から変位 Δx を読み取ることができ、3つの変数の全てを読み取ることができます。

運動の表し方

物体の運動は、位置、速度、加速度を用いて表し、$v-t$ グラフによって、その関係を表すことができる。

では、実際にこれらを使って問題を解いてみましょう。

例題 1

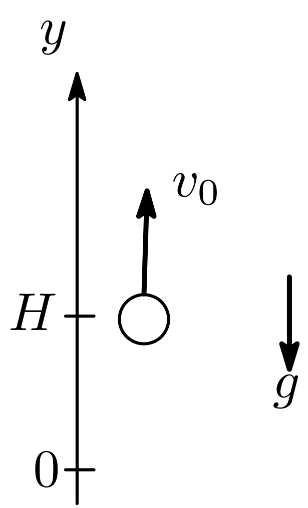
図のように、鉛直上向きに y 軸をとり、$y = H$ の位置から上向きに速度 v_0 で物体を投げ上げた。物体を投げた時刻を $t = 0$、重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。

(1) 最高点の高さ h を求めよ。

(2) 再び $y = H$ となる時刻を t_1 とする。t_1 を v_0, g を用いて表せ。

(3) $t = 2t_1$ のときに、物体は $y = 0$ の位置に達した。このときの速度 v_2 を求めよ。

(4) H を g, v_0 を用いて表せ。



運動の表し方

問題文中で物体の加速度が与えられているので、加速度 $\rightarrow$ 速度 $\rightarrow$ 位置と、時間で積分して運動を表す変数を求めてみましょう。

題意より、物体の加速度は、重力加速度 g で、下向きだから、

$$\ddot{y} = -g$$

時間 t で積分すると、速度 $\dot{y}$ は、

$$\dot{y} = -gt + C_1 (C_1 \text{ は積分定数})$$

$t = 0$ のときに、速度 $\dot{y} = v_0$ だったので、$v_0 = 0 + C_1 \quad \therefore C_1 = v_0$
よって、速度 $\dot{y}$ は、

$$\dot{y} = -gt + v_0 \quad \ldots ①$$

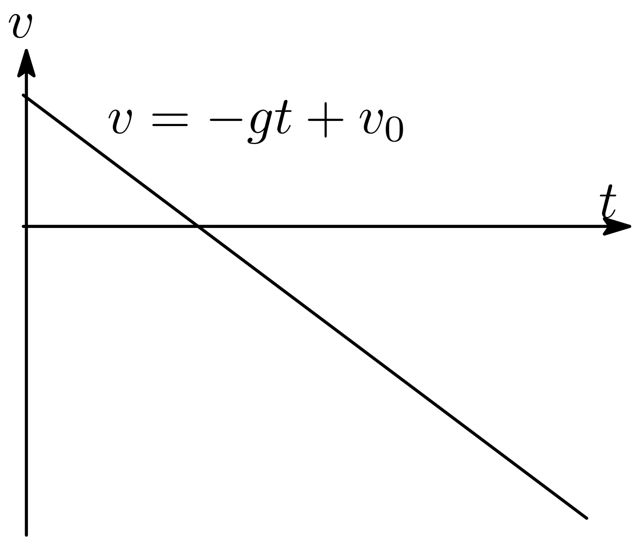
時間 t でさらに積分すると、位置 y は、

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

$t = 0$ のときに、位置 $y = H$ だったので、$H = 0 + C_2 \quad \therefore C_2 = H$ よって、位置 y は、

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + H \quad \ldots ②$$

$v-t$ グラフも書いておくと、下図のようになります。



このように、位置、速度、加速度が微分積分関係にあることが分かれば、時刻 t の関数は、計算によって、その都度求めることができるので、覚える必要がありません。

これで、運動を表せました。それでは、問題を解いていきましょう。

まず、多くの受験生がこう解くんじゃないかなという解法をやってみます。

【受験生的解法】

(1) 最高点の時刻を t_0 とすると、最高点では速度が 0 だから、①式で速度 $\dot{y} = 0$ として、t_0 を求めると、

$$0 = -gt_0 + v_0 \quad \therefore t_0 = \frac{v_0}{g}$$

$t = t_0$ のときの位置を求めるために。$t = t_0$ を②式に代入して、最高点の位置を計算すると、

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} + H = \frac{v_0^2}{2g} + H$$

(2)$y = H$ の時の時刻 t_1 を求めるために、②式で $y = H$ とすると、

$$H = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 + H$$

$$\therefore t_1\left(v_0 - \frac{1}{2}gt_1\right) = 0$$

$t_1 > 0$ より、$t_1 = \dfrac{2v_0}{g}$

(3)$t=2t_1=\dfrac{4v_0}{g}$ のときの速度を求めるために、$t=2t_1$ を①式に代入して、

$$v=-g\cdot\frac{4v_0}{g}+v_0=-3v_0$$

(4)$t=2t_1$ のときの位置 $y=0$ になったから、②式で、$t=2t_1$ のときの位置を 0 とすると、

$$0=-\frac{1}{2}g(2t_1)^2+v_0(2t_1)+H$$

$$\therefore H=\frac{4v_0^2}{g}$$

このようにして、正答を求めるのが、標準的な受験生の解法ではないかと思います。

でも、この解法では、せっかくの $v-t$ グラフを全く活用していません。グラフよりも、式を優先しているのです。

そこで、グラフをフル活用して解いてみましょう。

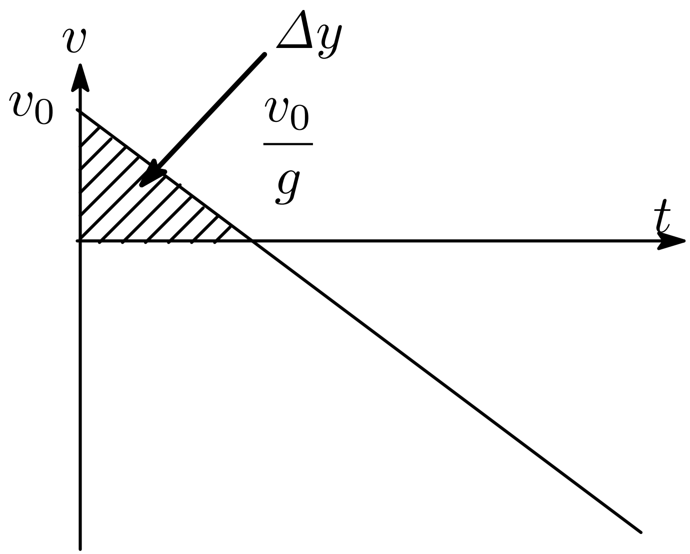
【田原式解法】

(1) 最高点の時刻を t_0 とすると、最高点では速度が 0 だから、①式より、

$$0 = -gt_0 + v_0 \quad \therefore t_0 = \frac{v_0}{g}$$

よって、最初の位置から最高点までの変位 $\varDelta y$ は、$v-t$ グラフの三角形の面積より

$$\varDelta y = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{g} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

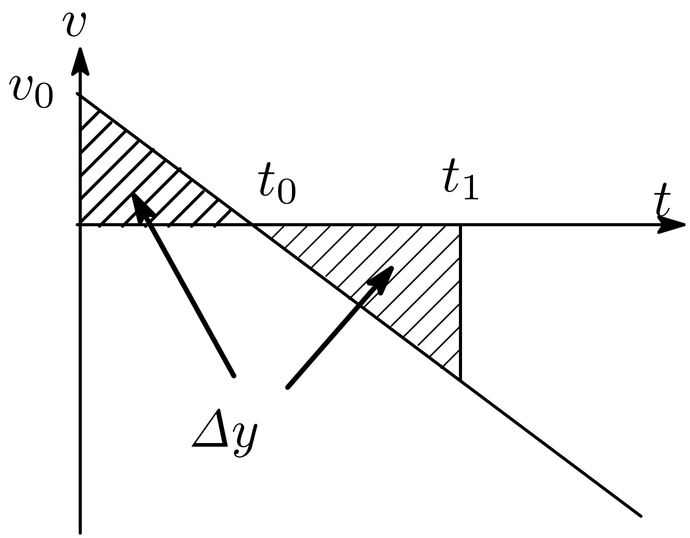


よって、最高点の位置は、

$$y = H + \varDelta y = H + \frac{v_0^2}{2g}$$

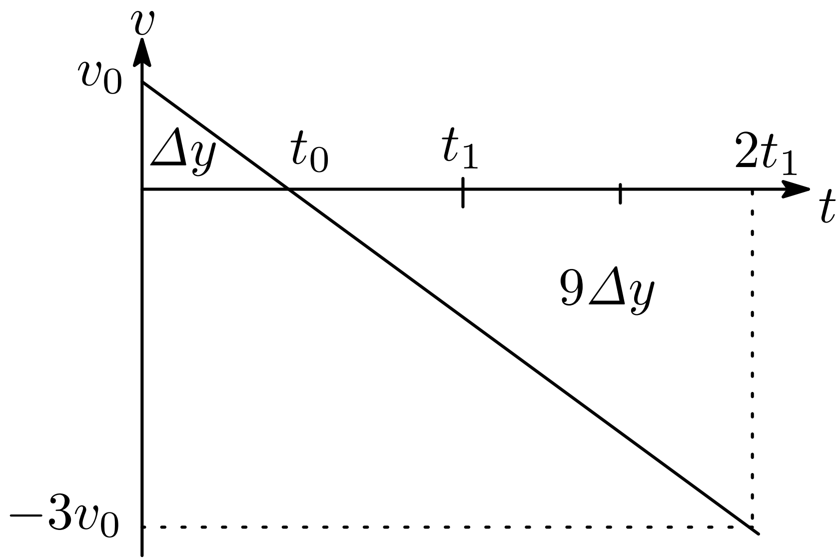
(2) 上向きに Δy 動いて、下向きに Δy 動いたところが元の位置 $y = H$ だから、$v - t$ グラフの対称性より、

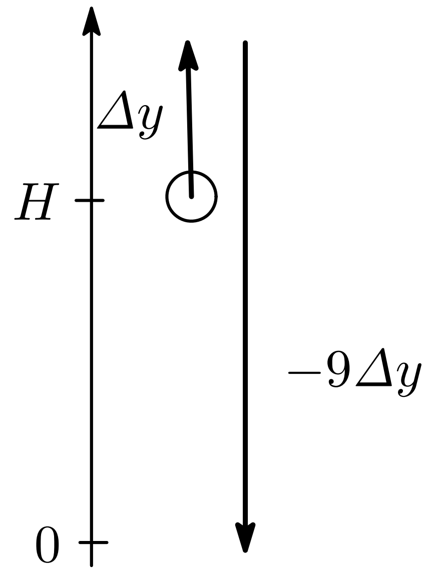
$$t_1 = 2t_0 = \frac{2v_0}{g}$$



(3)$t=2t_1$ のときの速度は、$v-t$ グラフから１：３の三角形の相似比を読み取って、

$$v=-3v_0$$





(4)$v-t$ グラフに見られる三角形の相似比が１：３より、面積比は、１：９となる。よって、上向きに Δy 動き、下向きに $9\Delta y$ 動いたところが原点になるから、

$$H=8\Delta y=\frac{4v_0^2}{g}$$

【受験生的解法】が、「計算」をしているのに対し、僕は「規則を見抜く」ことをしています。

計算をして答が出たからといって、その現象が分かったことになるでしょうか。

その現象に見られる一般的な性質を発見することによって、「分かった！」という気持ちになるのです。

そのためには、できるだけ計算をせずに、規則を見抜いて答を出すことを目指すようにすることが、物理を学習するポイントです。

そして、運動の規則性を発見するためには、式よりも、$v-t$ グラフのほうが役に立ちます。

「$v-t$ グラフから、できるだけ運動の規則性を発見して解く」という姿勢を忘れないで下さい。

今日はここまでです。

メールマガジン「楽しい《たとえ話》で直感的に分かる物理の考え方」で書いた《たとえ話》のうち、第 1 講の内容と関係があるものを紹介します。

まだ読んでいない方は、ぜひ読んでみてください。理解が深まりますよ。

第 4 号　火の玉を見ました

第１講を読んだ質問・感想などは、コチラに送ってください。

宛先：web@rikasougou.com

※件名は「PDF 版第１講の質問（感想）」でお願いします。