田原の物理（基本編）PDF 版

第 2 講　運動方程式

講師　田原真人

こんにちは、田原です。

今回は、ついに運動方程式の登場です。

僕は、第０講でも、メルマガでも、サイトでも、「どんな力学の問題も運動方程式から解くことができる！」と言い続けてきました。

その運動方程式について、今日、お話するのです。

今回は、重要な講義になりますよ。
それでは、始めます。

今日の内容は、『田原の必修物理』の p12〜13, p23〜24 の内容です。

■慣性の法則

まずはじめに、運動方程式の土台になっている慣性の法則から説明します。

まず、次の文章を読んでください。

外力がはたらいていない物体の運動は？

① 静止（by アリストテレス）
② 等速直線運動（by ガリレオ・ガリレイ）

ここで言いたいのは、「アリストテレスによれば静止であり、ガリレオ・ガリレイによれば等速直線運動である」ということなんです。

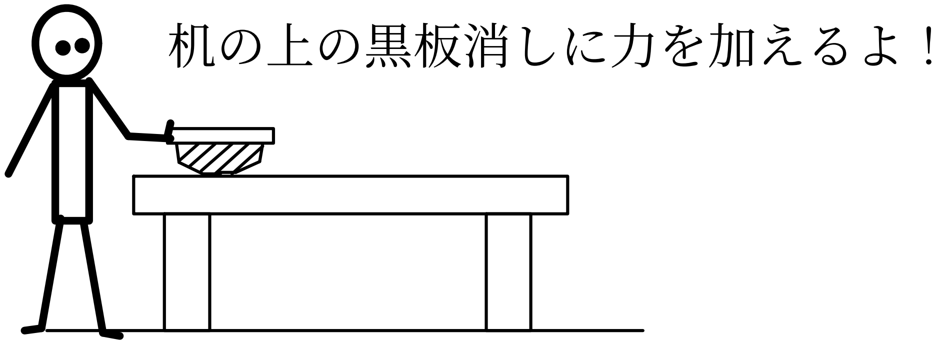
教科書には「等速直線運動をする」と書いてあるので、正解がガリレオ・ガリレイで、アリストテレスは間違い！と思うかもしれませんが、そんな単純な話ではありません。

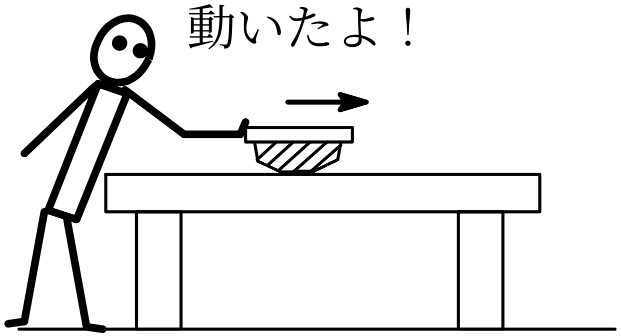
真実を決めるためには、それに先立って、「真実の決め方」を決める必要があります。
アリストテレスとガリレオ・ガリレイでは、真実の決め方が違うんです。それぞれの決め方によれば、「静止」であり、「等速直線運動」であるんです。
アリストテレス自然哲学では、感覚が捉えたものをそのまま真実とします。簡単に言えば、「見たんだから本当だ」というやり方です。

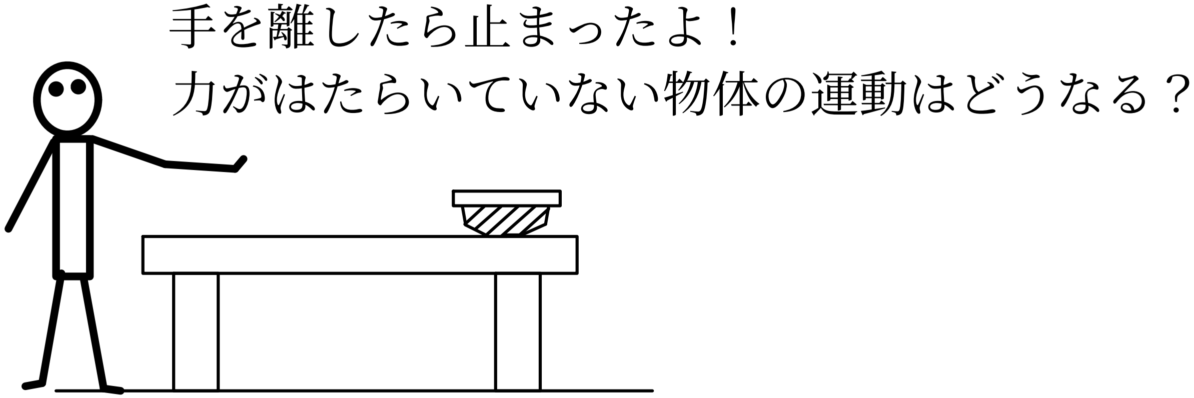
今皆さんは、アリストテレス主義者だとしますね。

つまり、皆さんは、「見たんだから本当だ」というやり方で真実を決めている人たちです。

次のページでは、そんな皆さんの前で机の上の黒板消しを動かしますから、その運動について質問に答えてくださいね。


机の上の黒板消しに力を加えるよ！


動いたよ！


手を離したら止まったよ！
力がはたらいていない物体の運動はどうなる？

黒板消しに力を加えると動きました。そして、力を加えるのを止めると黒板消しは静止しました。

その様子を皆さんは、確かに見ました。

皆さんは、アリストテレス主義者であることを忘れないで下さいね。

では、質問します。

力のはたらいていない物体はどんな運動をしますか？

「静止」ですよね。

アリストテレスの決め方に従えば「静止」は真実です。

では、どのような決め方で運動を捉えたら、「等速直線運動」という結論に達するのでしょうか。

ガリレオ・ガリレイは、「感覚は、現象の本質とそれを攪乱させるものとを同時に捉えてしまう。だから、感覚によって真実を決めるのは不適切だ。」と考えていました。

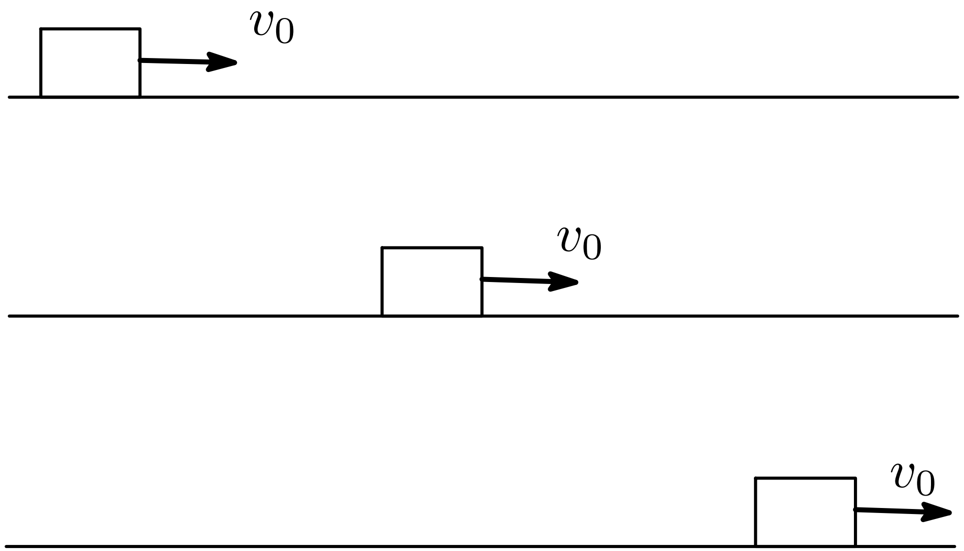
だから、ガリレオは、「本質を攪乱要因から、理性の力でより分けなくてはならない」というふうに考えました。

彼は「物体の運動に対して、摩擦力は攪乱要因である」だと考え、理性の力で、摩擦力の無い状況を思い浮かべ、運動の本質を見抜こうとしました。

ガリレオがやったことは、次のページのようなことです。

限りなく滑らかな水平面を思い浮かべます。

初速度 v_0 を与えます。



減速しません。

加速もしません。

曲がることもありません。

等速直線運動をします。

この「思い浮かべる」というのがポイントです。決して、実際に作った滑らかな水平面上の運動を肉眼を使って見ているわけではないのです。

「理性の目」を使って見ているのです。

そして、その目で「等速直線運動」を見たのです。

まとめます。

慣性の法則

外力の働いていない物体の運動は、**等速直線運動**である。

この文を見ると、「力と運動の関係」が見えてきます。

力がはたらいていないと、物体は等速直線運動をします。

では、力を加えると、物体の運動はどうなるんでしょうか？

少なくとも、等速直線運動ではなくなりますよね。

物体の運動は、力を加えたことによって速くなったり、遅くなったり、向きを変えられたりするんです。

力とは、「物体の運動を、等速直線運動から逸れさせるもの」だと考えることができます。

それでは、どのくらいの力を加えたら、どのくらい等速直線運動から逸れるんでしょうか？

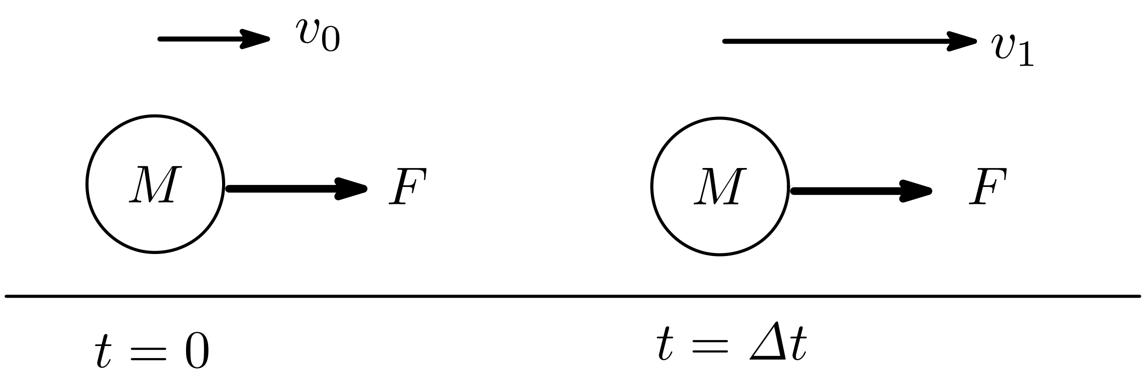
この運動の変化の法則を表したのは、ガリレオ・ガリレイの後を引き継いだニュートンでした。

彼は、運動が刻一刻と変化する様子を記述できる数学＝「微積分」を自ら作り、その「微積分」を用いて、「運動の変化の法則」＝「運動方程式」を書き表しました。

■運動方程式

それでは、いよいよ、運動方程式について説明しましょう。

質量 M 〔kg〕の物体に、外力 F を、時間 Δt 〔s〕だけ加えたら、速度が v_0 〔m/s〕から v_1 〔m/s〕へ変化したとします。



このときの、等速直線運動からのそれ具合＝速度変化 $\Delta v = v_1 - v_2$ が、質量や外力の大きさや、加えた時間とどのような関係があるか考えてみましょう。

- F が大きいほど、$\mathit{\Delta} v$ は大きくなる。$\to$ F に比例！
- $\mathit{\Delta} t$ が大きいほど、$\mathit{\Delta} v$ は大きくなる。$\to$ $\mathit{\Delta} t$ に比例！
- M が大きいほど、$\mathit{\Delta} v$ は小さくなる。$\to$ M に反比例！

よって、比例定数を k とすると、

$$\mathit{\Delta} v = k\frac{F\mathit{\Delta} t}{M} \quad \ldots ①$$

と表すことができます。ここで、比例定数 $k = 1$ になるように、F の目盛りを調節します。このようにして決めた力の単位を、ニュートンといい、〔N〕と表します。

このとき、①式を変形して、

$$M\frac{\mathit{\Delta} v}{\mathit{\Delta} t} = F$$

ここで、$\dfrac{\mathit{\Delta} v}{\mathit{\Delta} t} = a$($a$ は加速度) とおくと、

$$Ma = F$$

となります。この式を運動方程式と言います。

これまでに、何度か話したように、力学の全ての法則は、この運動方程式から導くことができます。

全ての力学現象は、この式の中に折りたたまれているのです。

運動方程式の読み方を教えます。

まず、F がゼロのときを考えます。そして、このように言います。

「$F = 0$ のときは、加速度 $a = 0$。つまり、外力がはたらかない物体の運動は等速直線運動！」

次に、力 F を加えたときを考え、こう続けます。

「力 F を加えると、物体の運動は等速直線運動から逸れ、加速度をその力の向きに生じる。質量 M は、速度の変化のしにくさ（重さじゃないよ）。」

運動方程式を立てると、そこから加速度を求めることができます。

第１講でやったように、加速度が求まれば、それを時間で積分して速度、位置を求めることができます。運動の様子を最もよく表すグラフ、$v-t$ グラフも描きましょう。

そうして、運動の様子を表すことができれば、問題を解くことができます。その際、代入計算に持ち込んで、ガリガリ計算するのではなく、$v-t$ グラフを用いて、できるだけ運動の規則性を読み取って問題を解いてみましょう。

ここまで理解したら、『田原の必修物理』の p13 例題２へチャレンジ！

分かりましたか？

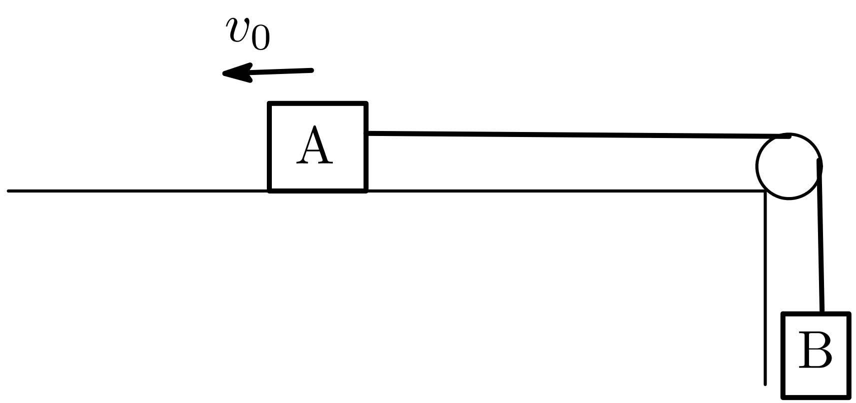
それでは、練習問題を解いてみましょう。

例題 1

図のように、なめらかな水平面の上に質量 M の物体 A を置き、質量の無視できる軽くて伸びない糸の一端を A に固定する。その糸を滑らかな滑車にかけ、他端を質量 m の物体 B に固定する。はじめに A に左向きの速さ v_0 を与えたときの運動について以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度を g とし、運動の間、糸はたるむことはないものとする。

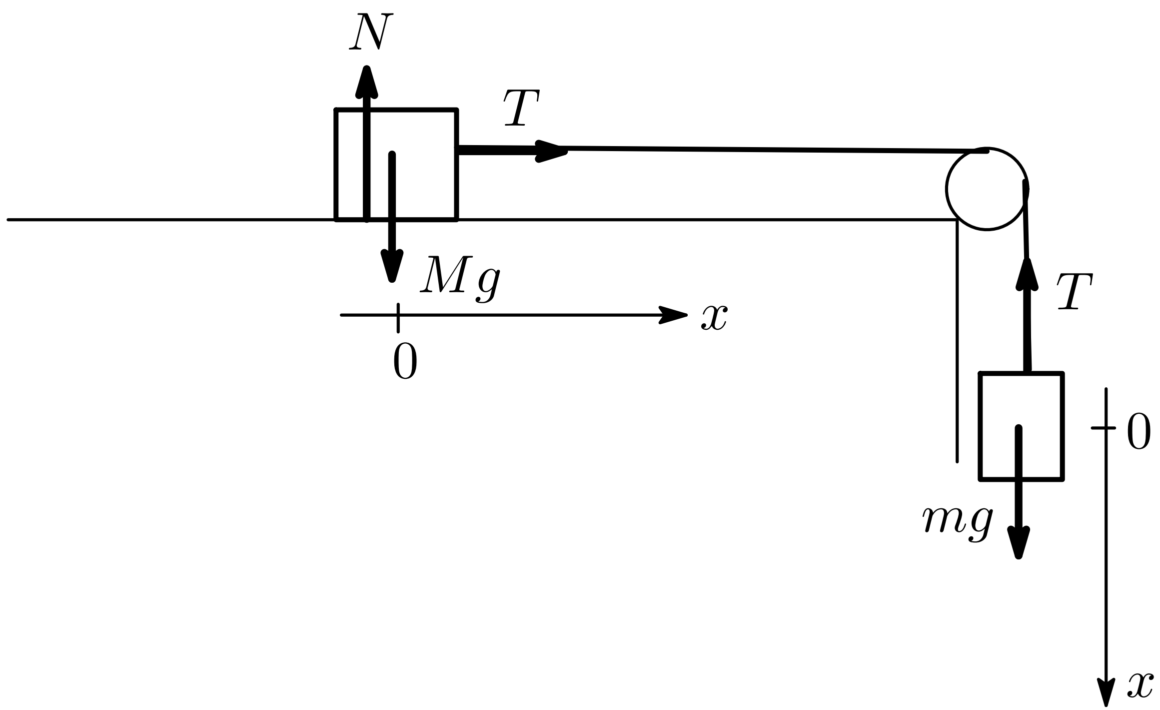
(1) A が最初に静止するまでに要した時間 t_0 を求めよ。

(2) $t = 4t_0$ のときの速さ v_1 と、初期位置からの右向きの変位 x_1 を求めよ。



運動方程式から運動の様子を表す

まずは、物体 A と物体 B にはたらく力を書いてみましょう。力を書くときのコツは、必修物理の P17 に書いてありますので、それを参考にして下さい。



力を書いたら、座標を書きます。A の右向きの変位を x とすると、A と B は連動して動くので、B の下向きの変位も同じく x と表せます。

では、A は右向き力を正、B は下向きの力を正として、運動方程式を立ててみましょう。

A の運動方程式

$$
\begin{aligned}
\text{水平}:& M\ddot{x} = T \quad \ldots ① \\
\text{鉛直}:& 0 = N - Mg
\end{aligned}
$$

B の運動方程式

$$
m\ddot{x} = mg - T \quad \ldots ②
$$

力学では、物体の運動を調べるときに、まず、可能な限り現象を細かく分割して調べてから、それを統合して全体を調べる方法をとります。

これを、「分析と統合の手法」と言います。

ここでも、連動して動く物体を A と B に分割して運動方程式をそれぞれについて立ててから、それらを統合して、連動して動く物体の運動を調べます。

２物体の運動を統合して、連動して動く物体系の運動を見るためには、お互いに及ぼしあっている力（これを相互作用といいます）を消去してまとめます。

①+ ②より、各辺を加えると、

$$(M+m)\ddot{x} = mg \quad \ldots ③$$

これを物体系 AB の運動方程式と言います。

問いに答える前に、③式から、加速度 $\ddot{x}$ を求め、第１講でやったのと同じようにして、運動の様子を表してみましょう。

③の両辺を $(M+m)$ でわって、

$$\ddot{x} = \frac{mg}{M+m}$$

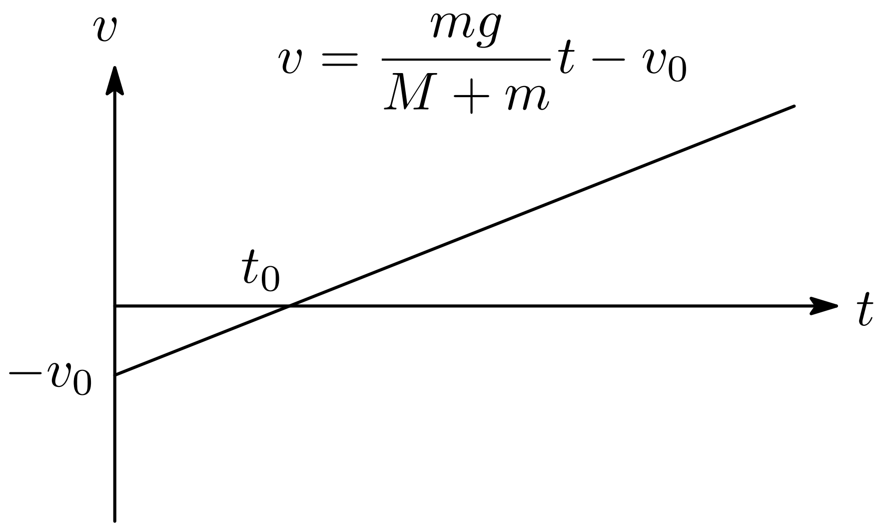
両辺を t で不定積分して、$\dot{x}(0) = -v_0$ から積分定数を決めると、

$$\dot{x} = \frac{mg}{M+m}t - v_0 \quad \ldots ④$$

さらに、両辺を t で不定積分して、$x(0)=0$ から積分定数を決めると、

$$x = \frac{mg}{2(M+m)}t^2 - v_0 t \quad \ldots ⑤$$

④より、$v-t$ グラフは次のようになります。



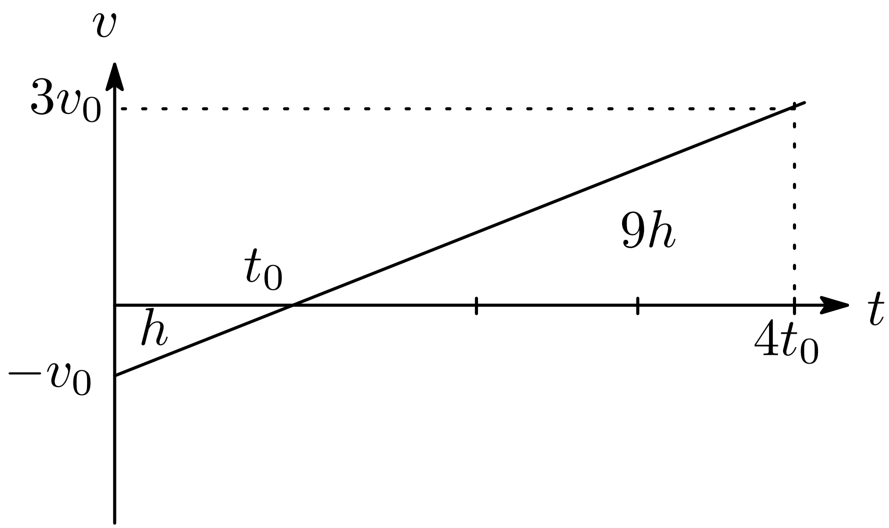
それでは、問いに答えていきましょう。

(1)④式より、

$$0 = \frac{mg}{M+m}t_0 - v_0 \qquad \therefore \underline{t_0 = \frac{(M+m)v_0}{mg}}$$

(2) ここで、⑤に t_0 を代入してガリガリ計算しても答は出るのですが、$v-t$ グラフから運動

の規則性を読み取って答えます。



$t = t_0$ のときの変位の大きさを h とすると、$v - t$ グラフの面積より、

$$h = \frac{1}{2}v_0t_0 = \frac{(M+m)v_0^2}{2mg}$$

$t = 4t_0$ のとき、$v - t$ グラフから比を読み取ると、

$$v_1 = \underline{3v_0}$$

$$x_1 = -h + 9h = 8h = \underline{\frac{4(M+m)v_0^2}{mg}}$$

どうですか？第１講で学んだことが生かせましたか？

ここで、問題を解くときに使った考え方は、

① 各物体について運動方程式を立てる。（分析）
② 相互作用を消去してまとめる。（統合）
③ 物体系の運動方程式より、運動の様子を求める。
④ 運動の様子は、加速度、速度、位置、$v-t$ グラフを用いて表す。
⑤ 代入計算をガリガリやるのではなく、$v-t$ グラフから運動の規則性を読み取って、スパ！っと解く。

たった１問を解くのでさえ、いろいろな考え方がその中に詰まっています。

ただ、今回出てきた考え方は、物理の問題を解くときにいつも使う考え方ですので、一度身につけてしまえば、解法の流れが見えてきます。

問題集などで、類題を探して練習をしてみてください。今日はここまでです。

メールマガジン「楽しい《たとえ話》で直感的に分かる物理の考え方」で書いた《たとえ話》のうち、第２講の内容と関係があるものを紹介します。

まだ読んでいない方は、ぜひ読んでみてください。理解が深まりますよ。

第６号　等速直線運動なんて見たことがありません
第７号　理想的な水平面上でのカーリング
第８号　スペースシャトルでハイタッチ

類題を解いて練習したい人は、こちらの問題集の中から選ぶとよいでしょう。

第 2 講を読んだ質問・感想などは、コチラに送ってください。

宛先： web@rikasougou.com

※件名は「PDF 版第 2 講の質問（感想）」でお願いします。

■著作権について

物理Ｗｅｂ講座の著作権は、(有) 熊猫舎に属します。無断複写・転載を禁じます。

Copyrights 2005 Kumanekosha All Rights Reserved